GENERALISERING AV HEUNS METODE

Generell 2. ordens metode:

$$y_{n+1} = y_n + (a_1 K_1 + a_2 K_2)h$$

$$K_1 = f(x_n, y_n), \quad K_2 = f(x_n + p_1 h, y_n + p_2 K_1 h)$$

Treng ikkje å rekne ut $f^{(n)}$, $n=1,\ldots$

$\Rightarrow$ Må finna a_1, a_2, p_1 og p_2 som gir 2. orden!
(Analogt til (1.2.6b))

Eulers metode:

$$y_{n+1} = y_i + f(x_n, y_n)h$$

Heuns metode:

$$\left.\begin{aligned} y^p_{n+1} &= y_n + h f(x_n, y_n) \qquad (P: \text{predikert}) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}\left(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^p_{n+1})\right) \end{aligned}\right\} O(h^2)$$

Ved innsetting i Taylorrekke for y (Runge og Kutta):

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ a_2 p_1 &= 1/2 \\ a_2 p_2 &= 1/2 \end{aligned}\right\}$$

3 likningar og 4 ukjende

$\Rightarrow$ fleire løysingar (metodar) mogleg

Generalisert Heuns metode:

Vel $a_2 = 1/2$, $a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 1/2$

$a_2 p_1 = 1/2 \Rightarrow p_1 = 1$

$a_2 p_2 = 1/2 \Rightarrow p_2 = 1$

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \left(\tfrac{1}{2}K_1 + \tfrac{1}{2}K_2\right)h \\ K_1 &= f(x_n, y_n), \quad K_2 = f(x_n + h, y_n + K_1 h) \end{aligned}\right\}$$

Gjennomsnittleg stigningstal

RK formulering av Heun OK!

GENERELL 2.ORDENS METODE

$$y_{n+1} = y_n + (a_1 K_1 + a_2 K_2) h$$

$$K_1 = f(x_n, y_n), \quad K_2 = f(x_n + p_1 h, y_n + p_2 K_1 h)$$

Krav for $O(h^2)$:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p_1 = \tfrac{1}{2}$$

$$a_2 p_2 = \tfrac{1}{2}$$

MIDTPUNKT METODEN

Vel $a_2 = 1$

$$a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$a_2 p_1 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow p_1 = \tfrac{1}{2}$$

$$a_2 p_1 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow p_2 = \tfrac{1}{2}$$

Innsatt i generelt uttrykk:

$$y_{n+1} = y_n + K_2 h$$

$$K_1 = f(x_n, y_n), \quad K_2 = f(x_n + \tfrac{1}{2} h, y_n + \tfrac{1}{2} K_1 h)$$

Midtpkt.

RALSTONS METODE:

Vel $a_2 = 2/3$

$$a_1 + a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 1/3$$

$$a_2 p_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow p_1 = 3/4$$

$$a_2 p_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow p_2 = 3/4$$

Innsatt i generell formel:

Vekta snitt av stigningstal

$$y_{n+1} = y_n + (\tfrac{1}{3} K_1 + \tfrac{2}{3} K_2) h$$

$$K_1 = f(x_n, y_n), \quad K_2 = f(x_n + 3/4 h, y_n + \tfrac{3}{4} K_1 h)$$

RUNGE-KUTTA 4TH ORDER METHOD

ODL: $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$

Taylor:

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' + \frac{h^2}{2!} y_n'' + \frac{h^3}{3!} y_n''' + \frac{h^4}{4!} y_n^{(4)} + O(h^5)$$

Kombinasjon av ODL og Taylor for $O(h^4)$-metode:

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n,y_n)h + \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y_n) + \frac{h^3}{3!} f''(x_n, y_n) + \frac{h^4}{4!} f'''(x_n, y_n)$$

Problem: Korleis finne f', f'' og f''' analytisk for generell f?

Runge og Kutta leita etter eit uttrykk på forma:

$$y_{n+1} = y_n + (a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3 + a_4 K_4),$$

a_i : vekter, $\sum a_i = 1$

K_i : $f(x_n + p_{i1} h, y_n + p_{i2} h)$

RK4-metoden:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)h$$

$K_1 = f(x_n, y_n)$, $K_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_1 h)$

$K_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}K_2 h)$, $K_4 = f(x_n + h, y_n + K_3 h)$

KUTTA-METODEN

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{8}(K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4)h$$

$K_1 = f(x_i, y_i)$, $\quad K_2 = f(x_i + \frac{1}{3}h,\ y_i + \frac{1}{3}K_1 h)$

$K_3 = f(x_i + \frac{2}{3}h,\ y_i - \frac{1}{3}K_1 h + hK_2)$, $\quad K_4 = f(x_i + h,\ y_i + hK_1 - hK_2 + hK_3)$

KRITERIUM FOR VAL AV PARAMETRE FOR GENERELL 2.ORDENS METODE

Generell 2.ordens metode:

$$y_{n+1} = y_n + (a_1 K_1 + a_2 K_2)h \qquad 1)$$

$$K_1 = f(x_n, y_n), \quad K_2 = f(x_n + p_1 h, \; y_n + p_2 K_1 h)$$

$$y_{n+1} = y_n + a_1 h f(x_n, y_n) + a_2 h f(x_n + p_1 h, \; y_n + p_2 h f(x_n, y_n)) \qquad 2)$$

Taylor utvikling av f i $(x_n + p_1 h, \; y_n + p_2 f h)$:

$$f(x_n + p_1 h, \; y_n + p_2 h K_1) = \underset{\substack{\Downarrow \\ f(x_n, y_n)}}{f} + p_1 h f_x + p_2 h f f_y + \text{h.o.l.} \qquad 3)$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Med 3) i 2):

$$y_{n+1} = y_n + a_1 h f + a_2 h \left(f + p_1 h f_x + p_2 h f f_y\right) + O(h^3)$$

$$= y_n + (a_1 + a_2) h f + (a_2 p_1 f_x + a_2 p_2 f f_y) h^2 + O(h^3) \qquad 4)$$

$\Rightarrow$ Metode 1) er $O(h^2)$ ved samanlikning av 4) og 8) dersom:

$$a_1 + a_2 = 1$$

$$a_2 p_1 = 1/2$$

$$a_2 p_2 = 1/2$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad 5)$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = f_x + f f_y \qquad 6)$$

2.ordens Taylor av ODL:

$$y(x+h) = y_n + h y' + \frac{h^2}{2!} y'' + O(h^3) \qquad 7)$$

Med 5) og 6) i 7):

$$y(x+h) = y_n + h f + \tfrac{1}{2} h^2 (f_x + f f_y) + O(h^3) \qquad 8)$$

(Litt) generell ODL m/ analytisk løysing:

$u' = au + b$, m $u(0) = u_0$, foreslår løysing $u = \begin{cases} \alpha + \beta e^{\gamma t}, & a \neq 0 \\ u_0 + \beta^* t, & a = 0 \end{cases}$ 1)

Finn $\alpha, \beta, \gamma, \beta^*$ ved substitusjon av løysing i ODL:

$$\gamma\beta e^{\beta t} = a\alpha + a\beta e^{\gamma t} + b, \qquad u(0) = u_0$$

$\Rightarrow \gamma = a \wedge \alpha = -\frac{b}{a}$, $u_0 = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = u_0 + \frac{b}{a}$, for $a \neq 0$, $u = u_0 + bt$ for $a = 0$

Løysinga for 1):

$$u = \begin{cases} (u_0 + \frac{b}{a})e^{at} - \frac{b}{a}, & a \neq 0 \\ u_0 + bt, & a = 0 \end{cases}$$

Nyttig for test av numeriske løysingar.

Examples: FallingsphereEulerHeunRK4

ODEschemes order test.